Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Anders Källström

Ordinära differentialekvationer
Vårterminen 1996
(Uppdaterad 00–03–14)

INNEHÅLL

1. LINJÄRA SYSTEM AV ODE

Låt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

vara en funktion $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ samt

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

en $n \times n$-matris, vars element är kontinuerliga funktioner.

Definition 1. *Ett linjärt* homogent *system är av formen*

(1) $$\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t).$$

Ett linjärt inhomogent *system är av formen*

(2) $$\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

där $\mathbf{b}(t)$ är en given vektorfunktion $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.

Sats 1 (Huvudsats för linjära system)**.** *Låt $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} \in C^1; \mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)\}$ vara mängden av lösningar till (1). Då gäller*

a) *$\mathcal{L}$ är ett linjärt rum*
b) $\dim \mathcal{L} = n$

Bevis: a) låt $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{L}$. Då fås om $\mathbf{w} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$,

$$\mathbf{w}' = c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' = c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{w}' = A\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{w} \in \mathcal{L}.$$

b) Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ vara en bas i $\mathbf{R}_n$. Enligt existenssatsen finns en entydig lösning till begynnelsevärdesproblemet

(3) $$\begin{cases} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{e}_i \end{cases}$$

för varje $i = 1, \dots, n$. Kalla lösningen till (3) för $\mathbf{w}_i(t)$.

Påst: $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ utgör en bas för $\mathcal{L}$.

Vi måste visa att

1) $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ är linjärt oberoende och

2) $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ spänner upp $\mathcal{L}$.

1) Antag att $c_1\mathbf{w}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{w}_n(t) = 0$ för alla t. Speciellt är för $t = 0$ $c_1\mathbf{e}_1 + \dots + c_n\mathbf{e}_n = 0$. Men $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende vilket ger att $c_1 = \dots = c_n = 0$. Alltså är $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ linjärt oberoende.
2) Låt $\mathbf{x}'(t = A(t)\mathbf{x}(t))$. Det finns tal $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ så att $\mathbf{x}(0) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Vi sätter $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \alpha_1\mathbf{w}_1(t) - \dots - \alpha_n\mathbf{w}_n(t)$. Då gäller (enligt a) i satsen) att $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$ samt $\mathbf{y}(0) = 0$. Men då följer av entydighetssatsen för lösningar till begynnelsevärdesproblemet att $\mathbf{y}(t) = 0$ för alla t. Alltså är $\mathbf{x}(t) = \alpha_1\mathbf{w}_1(t) + \dots + \alpha_n\mathbf{w}_n(t)$, vilket visar 2). Därmed är b) bevisad.

Definition 2. *En bas $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ i $\mathcal{L}$ kallas ett* fundamentalsystem *till (1).*

Sats 2 (Struktursats för lösningar till (2))**.** *Varje lösning till (2) är av formen*

(4)
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_P(t),$$
där

$\mathbf{x}_H(t)$ är en lösning till (1) och $\mathbf{x}_P(t)$ är en fix *lösning till (2)* (partikulärlösning).

Bevis: Varje $\mathbf{x}$ av formen (4) är en lösning till (2) ty

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_H' + \mathbf{x}_P' = A\mathbf{x}_H + A\mathbf{x}_P + \mathbf{b} = A(\mathbf{x}_H + \mathbf{x}_P) + \mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Omvänt, låt $\mathbf{x}_P$ vara en fix lösning till (2) och $\mathbf{x}$ en godtycklig annan lösning. Då blir

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_P' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} - (A\mathbf{x}_P + \mathbf{b}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)$$

dvs $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)$ är en lösning $\mathbf{x}_H$ till (1). Alltså följer att $\mathbf{x} = \mathbf{x}_H + \mathbf{x}_P$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Låt $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ vara ett fundamentalsystem av lösningar till (1) sådant att

$$\mathbf{w}_i(0) = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

där $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ är standardbasen i $\mathbf{R}_n$. Låt $\Phi(t)$ vara den $n \times n$-matris vars kolonner utgörs av $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$,

(5)
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Denna matris kallas en *fundamentalmatris* till (1). Eftersom kolonnerna är linjärt oberoende så har $\Phi(t)$ rang $= n$ oberoende av t, dvs $\Phi(t)$ är inverterbar för varje t. Vidare ser man

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{w}_1' & \dots & \mathbf{w}_n' \\ | & & | \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ A\mathbf{w}_1 & \dots & A\mathbf{w}_n \\ | & & | \end{pmatrix} =$$

$$A \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

där den sista produkten är en matrisprodukt. Vidare är

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = E \quad \text{enhetsmatris}$$

$\Phi(t)$ uppfyller således

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Phi'(t) & = & A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) & = & E \end{array} \right. \tag{6}$$

Om man har funnit en lösning till (6) så har vi också fullständigt löst (1). Låt nämligen

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

vara en vektor i $\mathbf{R}^n$. Sätt $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$. Det följer att

$$\mathbf{x}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{c} = A(t)\Phi(t)\mathbf{c} = A(t)\mathbf{x}(t)$$

samt

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{c} = E\mathbf{c} = \mathbf{c},$$

dvs $\mathbf{x}(t)$ är en lösning till (1) med begynnelsevärde $\mathbf{c}$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

2. Variation av parametrar

Antag att vi vill lösa (2)

$$\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

samt att vi redan har löst

$$\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

fullständigt. Vi känner då en fundamentalmatris $\Phi(t)$ till (1) och den allmänna lösningen till (1) är av formen

$$\mathbf{x}_H(t) = \Phi(t)\mathbf{c} \tag{7}$$

där $\mathbf{c}$ är en godtycklig vektor i $\mathbf{R}^n$. Vi ansätter nu en lösning till (2) av formen

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t) \tag{8}$$

där $\mathbf{c}(t)$ är en sökt vektorfunktion. Vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \Phi'(t)\mathbf{c}(t)+\Phi(t)\mathbf{c}'(t)\\ &= A(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t)+\Phi(t)\mathbf{c}'(t)\\ &= A(t)\mathbf{x}(t)+\Phi(t)\mathbf{c}'(t).\end{aligned}$$

Vi ser att $\mathbf{x}(t)$ är en lösning till (2) $\Leftrightarrow \Phi(t)\mathbf{c}'(t)=\mathbf{b}(t)$. Men $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris, alltså inverterbar, och vi får

$$\mathbf{c}'(t)=\Phi(t)^{-1}\mathbf{b}(t).$$

Integration ger

$$\mathbf{c}(t)=\mathbf{c}+\int^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds, \quad \mathbf{c}\text{ konstant}$$

Insättning i (8) ger sedan att

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{c}+\Phi(t)\int^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds$$

vilket är den allmänna lösningen till (2).

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

3. Linjära system med konstanta koefficienter

Om

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

är en konstant matris säges (2) ha *konstanta koefficienter*. Betrakta

(9)
$$\begin{cases}\mathbf{x}' = A\mathbf{x}\\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{c}\end{cases}$$

där A är en konstant matris. Detta system är ekvivalent med

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{c}+\int_0^t A\mathbf{x}(s)\,ds.$$

Picards metod med successiv approximation ger följden

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{c}\\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{c}+tA\mathbf{c}=(E+tA)\mathbf{c}\\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{c}+tA\mathbf{c}+\frac{t^2A^2}{2}\mathbf{c}=(E+tA+\frac{t^2A^2}{2})\mathbf{c}\\ &\vdots\\ \mathbf{x}_n(t) &= \mathbf{c}+tA\mathbf{c}+\ldots+\frac{t^nA^n}{n!}\mathbf{c}=\left(\sum_{k=0}^n\frac{t^kA^k}{k!}\right)\mathbf{c}\end{aligned}$$

När $n\to\infty$ konvergerar detta mot en lösning $\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{c}$ där $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris till (9). Formellt blir alltså

$$\Phi(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\frac{t^kA^k}{k!}.$$

I analogi med MacLaurin-utvecklingen av e^{tx} kan vi alltså skriva fundamentalmatrisen

(10)
$$\Phi(t)=e^{tA}$$

Man kan visa att denna funktion har de vanliga egenskaperna hos en exp-funktion

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= e^{(t+s)A} \\ e^{0A} &= E \\ (e^{tA})^n &= e^{ntA} \\ (e^{tA})^{-1} &= e^{-tA} \end{aligned}$$

(men $e^{tA}e^{tB} = e^{(t(A+B)}$ gäller i allmänhet bara om $AB = BA$). Den allmänna lösningen till (9) kan nu skrivas

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n \tag{11}$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

4. Beräkning av e^{tA}

Vi börjar med ett enkelt fall då man kan beräkna e^{tA} direkt ur potensseriedefinitionen. Antag att A är en *diagonalmatris*

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Potenserna av denna matris är lätta att beräkna

$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Då följer att

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_2^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\Big) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Nu antar vi att A är *diagonaliserbar*, dvs att det finns en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$. (Här är då elementen i D:s diagonal egenvärdena för A, och kolonnerna i P är motsvarande egenvektorer.) Potenserna av A kan skrivas om på följande sätt

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} = PDD\cdots DP^{-1} = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Beräkningen av e^{tA} går då till så här

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}PD^kP^{-1} = P\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}D^k\Big)P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Exempel 1. Om $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, så blir $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exempel 2. Beräkna e^{tA} då $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösning: Matrisen är symmetrisk, så man vet att den är diagonaliserbar och att transformationsmatrisen P kan till och med väljas ortogonal. Karakteristiska ekvationen för A är $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ och egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Motsvarande egenvektorer kan tas som $u_1 = (1,-1)/\sqrt{2}$, $u_2 = (1,1)/\sqrt{2}$. Om P har dessa vektorer som kolonner blir $P^{-1} = P^T$. Vi får

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tD}P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & -e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} & e^t + e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{3t}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel 3. Samma uppgift för $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning: Matrisen har egenvärdena $2, 1, -1$. Eftersom den har tre skilda egenvärden är den säkert diagonaliserbar. Egenvektorer är $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (2.2.1)$, $u_3 = (1,0,1)$. Man får (kontrollera räkningarna)

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exempel 4. Ett exempel på en icke-diagonaliserbar matris ges av $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Om vi räknar ut några potenser finner vi

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \text{allmänt} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

(Den sista formeln kan man bekräfta med ett induktionsbevis.) Man får då

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

I räkningarna använder man att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k\lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} \lambda^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k!} \lambda^k = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k = te^{\lambda t}.$$

Som exempel 4 visar, kan det bli ganska krångligt om A har multipla egenvärden. Vi avstår i denna framställning från att behandla detta fall fullständigt och hänvisar till mer djuplodande litteratur. Däremot tar vi med ett exempel på hur det kan gå när man har komplexa egenvärden. Först påminner vi om Eulers formler:

$$\begin{aligned} e^{ib} &= \cos b + i \sin b \quad & \cos b &= \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ e^{-ib} &= \cos b - i \sin b \quad & \sin b &= \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \end{aligned}$$

och formlerna

$$-i = \frac{1}{i}, \quad e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Exempel 5. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är $\pm i$. Motsvarande egenvektorer bestäms. För $\lambda_1 = i$ får vi ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{med en lösning} \quad u_1 = (-i, 1)$$

och på liknande sätt finner vi $u_2 = (i, 1)$. Vi får

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \quad e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it}+e^{-it} & -ie^{it}+ie^{-it} \\ ie^{it}-ie^{-it} & e^{it}+e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I mer komplicerade fall än så här gör man klokt i att anlita räknehjälpmedel (Maple, Derive etc.). För den intresserade antyds här dock, utan bevis, en mer djupsinnig metod som ibland kan användas

Vi ska nu se hur man kan beräkna $f(A)$ i det fall då f är en analytisk funktion. För beviset hänvisas till läroböcker i funktionalanalys. Låt A vara en $n \times n$-matris med karakteristisk ekvation

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0. \tag{12}$$

Denna har n st rötter. Antag att dessa är $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ med multiplicitet $m_1, \ldots, m_k$ respektive (där det gäller att $m_1 + \ldots + m_k = n$). För att beräkna $f(A)$ ansätter vi ett polynom

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} \tag{13}$$

av grad $n-1$. Koefficienterna $c_0, \ldots, c_{n-1}$ bestäms av att funktionen $f(\lambda) - g(\lambda)$ skall ha nollställen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ med multiplicitet $m_1, \ldots, m_k$. Detta bestämmer koefficienterna entydigt. Matrisen $f(A)$ ges nu av polynomet $g(A)$, dvs

$$f(A) = g(A) = c_0E + c_1A + \ldots + c_{n-1}A^{n-1}$$

Exempel 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

Ansätt $g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda$. För att beräkna e^{tA} väljs $f(\lambda) = e^{t\lambda}$.

$$\begin{aligned} &\lambda = -1 \text{ nollställe till } f(\lambda) - g(\lambda) \quad \Rightarrow \quad e^{-t} = c_0 - c_1 \\ &\lambda = 3 \text{ nollställe till } f(\lambda) - g(\lambda) \quad \Rightarrow \quad e^{3t} = c_0 + 3c_1 \end{aligned}$$

varur fås

$$c_1 = \frac{1}{4}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) \quad c_0 = \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t}$$

och vi får till slut

$$\begin{aligned} e^{tA} &= c_0E + c_1A = c_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & 2c_1 \\ 2c_1 & c_0 + c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{-t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{-t}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exempel 7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna e^{tA}. Här väljer vi $f(\lambda) = e^{t\lambda}$. Detta ger att

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}$$

Ansätt $g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda$. Detta ger

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda_1 = 1 & \Rightarrow & e^{it} = c_0 + c_1 i \\ \lambda_2 = -1 & \Rightarrow & e^{-it} = c_0 - c_1 i \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lclcl} c_0 & = & \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) & = & \cos t \\ c_1 & = & \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}) & = & \sin t \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow e^{tA} = c_E + c_1 A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Exempel 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. beräkna A^{100}. Vi väljer $f(\lambda) = \lambda^{100}$.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ (dubbelrot).}$$

Ansätt $g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda$. $\lambda = 1$ dubbelrot till $\lambda^{100} - c_0 - c_1\lambda$ ger

$$\left\{\begin{array}{rcr} 1 & = c_0 + c_1 & \\ 100 & = & c_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c_0 & = & -99 \\ c_1 & = & 100 \end{array}\right.$$

vilket ger att

$$A^{100} = c_0 E + c_1 A = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & c_1 \\ 0 & c_0 + c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

5. Wronski-determinanten

Låt $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ vara ett fundamentalsystem till (1). Sätt

$$W(t) = \det \Phi(t) = \det(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n).$$

Denna determinant kallas *Wronski-determinanten* till fundamentalsystemet $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$.

Sats 3 (Liouvilles formel). *Det gäller*

(14) $$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr} A(s)\, ds}$$ *där*

$\mathrm{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ *är det så kallade* spåret *(eng trace) till matrisen* $A(t)$.

Bevis: Derivatan av en determinant fås med hjälp av regeln för derivering av en produkt till

$$W'(t) = \begin{vmatrix} w'_{11} & w'_{21} & \ldots & w'_{n1} \\ w_{12} & \ldots & & \\ \vdots & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w'_{12} & w'_{22} & \ldots & \\ \vdots & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & \ldots & & \\ \vdots & & & \\ w'_{1n} & w'_{2n} & \ldots & w'_{nn} \end{vmatrix}$$

där

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} w_{i1} \\ \vdots \\ w_{in} \end{pmatrix}.$$

Om vi betraktar den k:e komponenten av ekvationen $\mathbf{w}_i' = A\mathbf{w}_i$ ser vi att

$$w_{ik}' = \sum_{j=1}^{n} a_k j w_{ij}.$$

Detta ger att

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & \dots & w_{n1} \\ \vdots & & & \\ w_{1k}' & \dots & & w_{nk}' \\ w_{1n} & \dots & & w_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} & \dots & w_{n1} \\ \vdots & & & \\ w_{1j} & \dots & & w_{nj} \\ w_{1n} & \dots & & w_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{rad k} \\ \\ \end{array}$$

Om $j \neq k$ så är determinanten $= 0$ ty två rader är lika.
Om $j = k$ så är determinanten $W(t)$.
Detta ger insatt i ekvationen ovan

$$W'(t) = a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) + \ldots + a_{nn}(t)W(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} W(t).$$

Om vi integrerar denna differentialekvation för $W(t)$ fås formel (14).

Anmärkning: Formel (14) visar att om $W(t) \neq 0$ i en punkt t_0 så är $W(t) \neq 0$ överallt. Detta visar att för ett godtyckligt fundamentalsystem $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ så är matrisen

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

inverterbar. (Detta inses naturligtvis också av det faktum att rangen för Φ är n.)